Jak řešit extremální úlohy bez derivací

Petr Vodstrčil

petr.vodstrcil@vsb.cz

Katedra aplikované matematiky, Fakulta elektrotechniky a informatiky,
Vysoká škola báňská–Technická univerzita Ostrava

Katedra aplikované matematiky

Terchová, 13.6. 2019

(Závěrečné setkání Math4U)

MATH4U

Spolufinancováno z programu Evropské unie Erasmus+

Úlohy řešené pomocí AG nerovnosti

Věta (AG–nerovnost)

Pro libovolná nezáporná reálná čísla $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *platí*

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n}. \tag{AG}$$

Rovnost v poslední nerovnosti nastane, právě když $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

Věta (AG–nerovnost)

Pro libovolná nezáporná reálná čísla $x_1, x_2, \ldots, x_n$ platí

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n}. \tag{AG}$$

Rovnost v poslední nerovnosti nastane, právě když $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

Poznámka

V případě dvou čísel x_1 a x_2 je AG nerovnost jednoduchým cvičením, neboť

$$\frac{x_1 + x_2}{2} \geq \sqrt{x_1 x_2} \iff \left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^2 \geq x_1 x_2 \iff$$

$$\iff x_1^2 + 2x_1 x_2 + x_2^2 \geq 4x_1 x_2 \iff (x_1 - x_2)^2 \geq 0.$$

Věta (AG–nerovnost)

Pro libovolná nezáporná reálná čísla $x_1, x_2, \ldots, x_n$ platí

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n}. \tag{AG}$$

Rovnost v poslední nerovnosti nastane, právě když $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

Poznámka

V případě dvou čísel x_1 a x_2 je AG nerovnost jednoduchým cvičením, neboť

$$\frac{x_1 + x_2}{2} \geq \sqrt{x_1 x_2} \iff \left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^2 \geq x_1 x_2 \iff$$

$$\iff x_1^2 + 2x_1 x_2 + x_2^2 \geq 4x_1 x_2 \iff (x_1 - x_2)^2 \geq 0.$$

Obecná AG nerovnost přímo plyne z následujících dvou pomocných tvrzení.

Pomocné tvrzení

Platí-li AG nerovnost pro libovolnou sadu n (nezáporných) čísel ($n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$), platí rovněž pro každou $2n$–tici nezáporných čísel.

Pomocné tvrzení

Platí-li AG nerovnost pro libovolnou sadu n (nezáporných) čísel ($n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$), platí rovněž pro každou 2n–tici nezáporných čísel.

Důkaz.

Nechť $x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{2n}$ jsou libovolně zvolená nezáporná čísla. Pak platí

$$\frac{x_1 + \cdots + x_n + x_{n+1} + \cdots + x_{2n}}{2n} = \frac{\frac{x_1+\cdots+x_n}{n} + \frac{x_{n+1}+\cdots+x_{2n}}{n}}{2} \geq$$

$$\geq \frac{\sqrt[n]{x_1 \cdot \cdots \cdot x_n} + \sqrt[n]{x_{n+1} \cdot \cdots \cdot x_{2n}}}{2} \geq \sqrt{\sqrt[n]{x_1 \cdot \cdots \cdot x_n} \cdot \sqrt[n]{x_{n+1} \cdot \cdots \cdot x_{2n}}} =$$

$$= \sqrt[2n]{x_1 \cdot \cdots \cdot x_n \cdot x_{n+1} \cdot \cdots \cdot x_{2n}}.$$

□

Pomocné tvrzení

Platí-li AG nerovnost pro libovolnou sadu n (nezáporných) čísel ($n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$), platí rovněž pro každou 2n–tici nezáporných čísel.

Důkaz.

Nechť $x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_{2n}$ jsou libovolně zvolená nezáporná čísla. Pak platí

$$\frac{x_1 + \cdots + x_n + x_{n+1} + \cdots + x_{2n}}{2n} = \frac{\frac{x_1+\cdots+x_n}{n} + \frac{x_{n+1}+\cdots+x_{2n}}{n}}{2} \geq$$

$$\geq \frac{\sqrt[n]{x_1 \cdot \dots \cdot x_n} + \sqrt[n]{x_{n+1} \cdot \dots \cdot x_{2n}}}{2} \geq \sqrt{\sqrt[n]{x_1 \cdot \dots \cdot x_n} \cdot \sqrt[n]{x_{n+1} \cdot \dots \cdot x_{2n}}} =$$

$$= \sqrt[2n]{x_1 \cdot \dots \cdot x_n \cdot x_{n+1} \cdot \dots \cdot x_{2n}}.$$

□

Poznámka

Nyní tedy víme, že AG nerovnost platí pro libovolnou n-tici nezáporných čísel, pokud $n \in \{2, 4, 8, 16, 32, \dots\}$.

Pomocné tvrzení

Platí-li AG nerovnost pro libovolnou n-tici nezáporných čísel ($n \in \mathbb{N}, n \geq 3$)*, platí rovněž pro každou* $(n-1)$*–tici nezáporných čísel.*

Pomocné tvrzení

Platí-li AG nerovnost pro libovolnou n-tici nezáporných čísel ($n \in \mathbb{N}, n \geq 3$), platí rovněž pro každou $(n-1)$–tici nezáporných čísel.

Důkaz.

Nechť $x_1, \ldots, x_{n-1}$ jsou libovolně zvolená nezáporná čísla.
Definujme číslo x_n rovností

$$x_n = \frac{x_1 + \cdots + x_{n-1}}{n-1}. \qquad (\clubsuit)$$

Pomocné tvrzení

Platí-li AG nerovnost pro libovolnou n-tici nezáporných čísel ($n \in \mathbb{N}, n \geq 3$), platí rovněž pro každou $(n-1)$–tici nezáporných čísel.

Důkaz.

Nechť $x_1, \ldots, x_{n-1}$ jsou libovolně zvolená nezáporná čísla.
Definujme číslo x_n rovností

$$x_n = \frac{x_1 + \cdots + x_{n-1}}{n-1}. \qquad (\clubsuit)$$

AG nerovnost pro čísla $x_1, \ldots, x_n$ pak dává

$$x_n = \frac{nx_n}{n} = \frac{(n-1)x_n + x_n}{n} = \frac{x_1 + \cdots + x_{n-1} + x_n}{n} \overset{\text{AG}}{\geq} \sqrt[n]{x_1 \cdot \cdots \cdot x_{n-1} x_n}.$$

Pomocné tvrzení

Platí-li AG nerovnost pro libovolnou n-tici nezáporných čísel ($n \in \mathbb{N}, n \geq 3$), platí rovněž pro každou $(n-1)$–tici nezáporných čísel.

Důkaz.

Nechť $x_1, \ldots, x_{n-1}$ jsou libovolně zvolená nezáporná čísla.
Definujme číslo x_n rovností

$$x_n = \frac{x_1 + \cdots + x_{n-1}}{n-1}. \qquad (\clubsuit)$$

AG nerovnost pro čísla $x_1, \ldots, x_n$ pak dává

$$x_n = \frac{nx_n}{n} = \frac{(n-1)x_n + x_n}{n} = \frac{x_1 + \cdots + x_{n-1} + x_n}{n} \overset{\text{AG}}{\geq} \sqrt[n]{x_1 \cdot \cdots \cdot x_{n-1} x_n}.$$

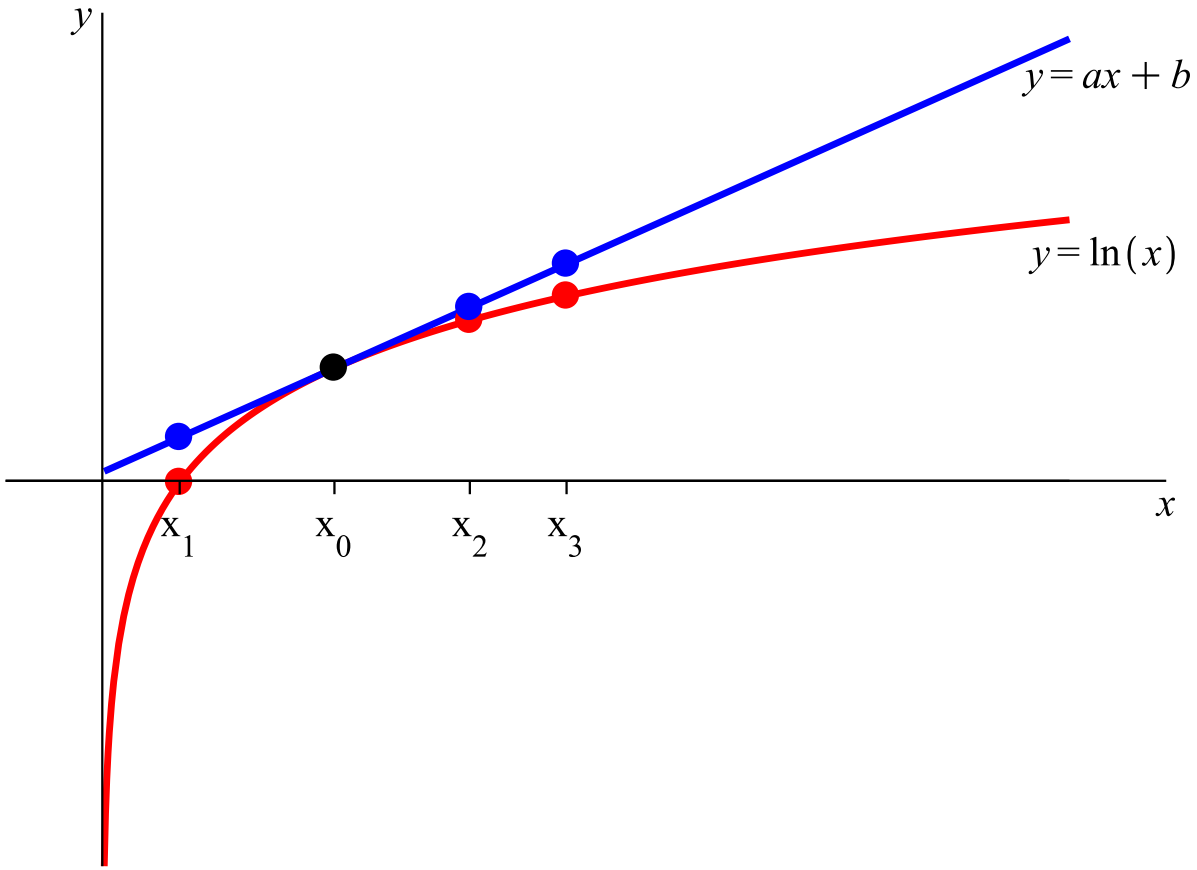
Poslední nerovnost je ale ekvivalentní s

$$x_n^n \geq x_1 \cdot \cdots \cdot x_{n-1} x_n \iff x_n^{n-1} \geq x_1 \cdot \cdots \cdot x_{n-1} \iff x_n \geq \sqrt[n-1]{x_1 \cdot \cdots \cdot x_{n-1}},$$

což vzhledem k ($\clubsuit$) dává požadované tvrzení. $\square$

Jiný důkaz AG nerovnosti

Nechť $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^+$ jsou libovolná. Položme $x_0 = \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}$ a v bodě $(x_0, \ln x_0)$ sestrojme tečnu (o rovnici $y = ax + b$) ke grafu funkce $y = \ln x$. Níže uvedený obrázek ilustruje situaci pro $n = 3$.



Jiný důkaz AG nerovnosti

Z konkávnosti logaritmu ihned plyne, že

$$(\forall i \in \{1, \ldots, n\}) : \; ax_i + b \geq \ln x_i.$$

Jiný důkaz AG nerovnosti

Z konkávnosti logaritmu ihned plyne, že

$$(\forall i \in \{1, \ldots, n\}) : \; ax_i + b \geq \ln x_i.$$

Sečtením výše uvedených n nerovností dostaneme

$$a(x_1 + \cdots + x_n) + nb \geq \ln x_1 + \cdots + \ln x_n.$$

Jiný důkaz AG nerovnosti

Z konkávnosti logaritmu ihned plyne, že

$$(\forall i \in \{1, \dots, n\}) : \; ax_i + b \geq \ln x_i.$$

Sečtením výše uvedených n nerovností dostaneme

$$a(x_1 + \cdots + x_n) + nb \geq \ln x_1 + \cdots + \ln x_n.$$

Nyní obě strany nerovnosti vydělíme číslem n.

$$\underbrace{a \cdot \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} + b}_{=ax_0+b=\ln x_0} \geq \underbrace{\frac{\ln x_1 + \cdots + \ln x_n}{n}}_{=\ln \sqrt[n]{x_1 \cdot \dots \cdot x_n}}.$$

Jiný důkaz AG nerovnosti

Z konkávnosti logaritmu ihned plyne, že

$$(\forall i \in \{1, \dots, n\}) : \; ax_i + b \geq \ln x_i.$$

Sečtením výše uvedených n nerovností dostaneme

$$a(x_1 + \cdots + x_n) + nb \geq \ln x_1 + \cdots + \ln x_n.$$

Nyní obě strany nerovnosti vydělíme číslem n.

$$\underbrace{a \cdot \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} + b}_{=ax_0+b=\ln x_0} \geq \underbrace{\frac{\ln x_1 + \cdots + \ln x_n}{n}}_{=\ln \sqrt[n]{x_1 \cdot \dots \cdot x_n}}.$$

Odlogaritmováním pak dostaneme dokazovanou nerovnost. □

Příklad

Ze všech obdélníků daného obvodu o najděte ten, který má největší obsah.

Příklad

Ze všech obdélníků daného obvodu o najděte ten, který má největší obsah.

Řešení.

Jsou-li $a, b > 0$ délky stran obdélníku, platí

$$S = ab \overset{\text{AG}}{\leq} \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \left(\frac{o}{4}\right)^2 = \frac{o^2}{16} = konst.$$

Rovnost přitom nastane, právě když $a = b$, tj. když se jedná o čtverec. $\square$

Příklad

Ze všech obdélníků daného obvodu o najděte ten, který má největší obsah.

Řešení.

Jsou-li $a, b > 0$ délky stran obdélníku, platí

$$S = ab \overset{\text{AG}}{\leq} \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \left(\frac{o}{4}\right)^2 = \frac{o^2}{16} = konst.$$

Rovnost přitom nastane, právě když $a = b$, tj. když se jedná o čtverec. $\square$

Příklad

Najděte trojúhelník daného obvodu $o = 2s$, který má největší obsah.

Příklad

Ze všech obdélníků daného obvodu o najděte ten, který má největší obsah.

Řešení.

Jsou-li $a, b > 0$ délky stran obdélníku, platí

$$S = ab \overset{\text{AG}}{\leq} \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \left(\frac{o}{4}\right)^2 = \frac{o^2}{16} = konst.$$

Rovnost přitom nastane, právě když $a = b$, tj. když se jedná o čtverec. □

Příklad

Najděte trojúhelník daného obvodu $o = 2s$, který má největší obsah.

Řešení.

$$S^2 = s \cdot (s-a)(s-b)(s-c) \overset{\text{AG}}{\leq} s \cdot \left(\frac{(s-a)+(s-b)+(s-c)}{3}\right)^3 = \frac{s^4}{27} = konst.$$

Rovnost nastane, právě když $a = b = c$, tj. když se jedná o rovnostranný trojúhelník. □

Příklad

Z plechu tvaru čtverce vyřízněte v rozích čtyři stejné čtverce tak, aby ohnutím a spájením vznikla krabička maximálního objemu.

Příklad

Z plechu tvaru čtverce vyřízněte v rozích čtyři stejné čtverce tak, aby ohnutím a spájením vznikla krabička maximálního objemu.

Řešení.

Stranu čtvercového plechu označme a a stranu vyříznutých čtverců označme x. Pak pro objem krabičky platí $V = (a - 2x)^2 \cdot x$.

Příklad

Z plechu tvaru čtverce vyřízněte v rozích čtyři stejné čtverce tak, aby ohnutím a spájením vznikla krabička maximálního objemu.

Řešení.

Stranu čtvercového plechu označme a a stranu vyříznutých čtverců označme x. Pak pro objem krabičky platí $V = (a - 2x)^2 \cdot x$.

Nyní použijeme AG–nerovnost následujícím způsobem:

$$4V = (a-2x)\cdot(a-2x)\cdot(4x) \overset{\text{AG}}{\leq} \left(\frac{(a-2x)+(a-2x)+4x}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}a^3 = konst.$$

Příklad

Z plechu tvaru čtverce vyřízněte v rozích čtyři stejné čtverce tak, aby ohnutím a spájením vznikla krabička maximálního objemu.

Řešení.

Stranu čtvercového plechu označme a a stranu vyříznutých čtverců označme x. Pak pro objem krabičky platí $V = (a - 2x)^2 \cdot x$.

Nyní použijeme AG–nerovnost následujícím způsobem:

$$4V = (a-2x)\cdot(a-2x)\cdot(4x) \overset{\text{AG}}{\leq} \left(\frac{(a-2x)+(a-2x)+4x}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}a^3 = konst.$$

Rovnost v poslední nerovnosti nastane, právě když $a - 2x = 4x$, tj. $x = \frac{a}{6}$. $\square$

Příklad

Z plechu tvaru čtverce vyřízněte v rozích čtyři stejné čtverce tak, aby ohnutím a spájením vznikla krabička maximálního objemu.

Řešení.

Stranu čtvercového plechu označme a a stranu vyříznutých čtverců označme x. Pak pro objem krabičky platí $V = (a-2x)^2 \cdot x$.

Nyní použijeme AG–nerovnost následujícím způsobem:

$$4V = (a-2x)\cdot(a-2x)\cdot(4x) \overset{\text{AG}}{\leq} \left(\frac{(a-2x)+(a-2x)+4x}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}a^3 = konst.$$

Rovnost v poslední nerovnosti nastane, právě když $a-2x = 4x$, tj. $x = \frac{a}{6}$. $\square$

Poznámka

Můžete se zkusit zamyslet nad tím, jak by se řešil případ, kdyby původní plech nebyl čtvercový, ale obdélníkový (např. 7×15).

Příklad

Ze všech válců o daném objemu V najděte ten, který má nejmenší povrch.

Příklad

Ze všech válců o daném objemu V najděte ten, který má nejmenší povrch.

Řešení.

Platí $V = \pi r^2 v \implies v = \frac{V}{\pi r^2}$.

Příklad

Ze všech válců o daném objemu V najděte ten, který má nejmenší povrch.

Řešení.

Platí $V = \pi r^2 v \implies v = \frac{V}{\pi r^2}$.

Odtud máme

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi r v = 2\pi r^2 + 2\pi r \frac{V}{\pi r^2} = 2\pi r^2 + \frac{2V}{r} =$$

$$= 2\pi r^2 + \frac{V}{r} + \frac{V}{r} \overset{\text{AG}}{\geq} 3\sqrt[3]{2\pi r^2 \cdot \frac{V}{r} \cdot \frac{V}{r}} = 3\sqrt[3]{2\pi V^2} = konst.$$

Příklad

Ze všech válců o daném objemu V najděte ten, který má nejmenší povrch.

Řešení.

Platí $V = \pi r^2 v \implies v = \frac{V}{\pi r^2}$.

Odtud máme

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi r v = 2\pi r^2 + 2\pi r \frac{V}{\pi r^2} = 2\pi r^2 + \frac{2V}{r} =$$

$$= 2\pi r^2 + \frac{V}{r} + \frac{V}{r} \overset{\text{AG}}{\geq} 3\sqrt[3]{2\pi r^2 \cdot \frac{V}{r} \cdot \frac{V}{r}} = 3\sqrt[3]{2\pi V^2} = konst.$$

Rovnost nastane, právě když $2\pi r^2 = \frac{V}{r}$, tj. $r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$, $v = \sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}} = 2r$ (tzv. rovnostranný válec). $\square$

Další úlohy na AG nerovnost

Příklad

Do rotačního kužele o poloměru podstavy r a výšce v je vepsán rotační válec s maximálním objemem. Určete poloměr podstavy a výšku tohoto válce.

Další úlohy na AG nerovnost

Příklad

Do rotačního kužele o poloměru podstavy r a výšce v je vepsán rotační válec s maximálním objemem. Určete poloměr podstavy a výšku tohoto válce.

Příklad

Do elipsy o poloosách a, b vepište obdélník tak, aby jeho strany byly rovnoběžné s osami elipsy a přitom jeho obsah byl maximální.

Metoda diskriminantu

Metodu diskriminantu osvětlíme na následujícím jednoduchém příkladu.

Příklad

Pro které $x \in \mathbb{R}^+$ *nabývá výraz* $x + \frac{1}{x}$ *nejmenší hodnoty?*

Metodu diskriminantu osvětlíme na následujícím jednoduchém příkladu.

Příklad

Pro které $x \in \mathbb{R}^+$ nabývá výraz $x + \frac{1}{x}$ nejmenší hodnoty?

Řešení.

Snadno se přesvědčíme, že naše úloha je ekvivalentní následujícímu problému:

Najděte nejmenší hodnotu reálného parametru p (a odpovídající x) tak, aby rovnice $x + \frac{1}{x} = p$ (s neznámou x a parametrem p) měla kladné řešení.

Metodu diskriminantu osvětlíme na následujícím jednoduchém příkladu.

Příklad

Pro které $x \in \mathbb{R}^+$ nabývá výraz $x + \frac{1}{x}$ nejmenší hodnoty?

Řešení.

Snadno se přesvědčíme, že naše úloha je ekvivalentní následujícímu problému:

Najděte nejmenší hodnotu reálného parametru p (a odpovídající x) tak, aby rovnice $x + \frac{1}{x} = p$ (s neznámou x a parametrem p) měla kladné řešení.

Rovnici $x + \frac{1}{x} = p$ si můžeme přepsat do tvaru $x^2 - px + 1 = 0$, což je rovnice kvadratická.

Metodu diskriminantu osvětlíme na následujícím jednoduchém příkladu.

Příklad

Pro které $x \in \mathbb{R}^+$ nabývá výraz $x + \frac{1}{x}$ nejmenší hodnoty?

Řešení.

Snadno se přesvědčíme, že naše úloha je ekvivalentní následujícímu problému:

Najděte nejmenší hodnotu reálného parametru p (a odpovídající x) tak, aby rovnice $x + \frac{1}{x} = p$ (s neznámou x a parametrem p) měla kladné řešení.

Rovnici $x + \frac{1}{x} = p$ si můžeme přepsat do tvaru $x^2 - px + 1 = 0$, což je rovnice kvadratická.

Pokud chceme, aby tato kvadratická rovnice měla řešení, musí být její diskriminant $D = p^2 - 4$ nezáporný, což nás vede k podmínce $p \in (-\infty, -2\rangle \cup \langle 2, +\infty)$.

Metodu diskriminantu osvětlíme na následujícím jednoduchém příkladu.

Příklad

Pro které $x \in \mathbb{R}^+$ nabývá výraz $x + \frac{1}{x}$ nejmenší hodnoty?

Řešení.

Snadno se přesvědčíme, že naše úloha je ekvivalentní následujícímu problému:

Najděte nejmenší hodnotu reálného parametru p (a odpovídající x) tak, aby rovnice $x + \frac{1}{x} = p$ (s neznámou x a parametrem p) měla kladné řešení.

Rovnici $x + \frac{1}{x} = p$ si můžeme přepsat do tvaru $x^2 - px + 1 = 0$, což je rovnice kvadratická.

Pokud chceme, aby tato kvadratická rovnice měla řešení, musí být její diskriminant $D = p^2 - 4$ nezáporný, což nás vede k podmínce $p \in (-\infty, -2\rangle \cup \langle 2, +\infty)$.

V případě, že $p \in (-\infty, -2\rangle$, nemůžeme dostat kladné řešení x.
Proto musí platit $p \geq 2$.

Metodu diskriminantu osvětlíme na následujícím jednoduchém příkladu.

Příklad

Pro které $x \in \mathbb{R}^+$ nabývá výraz $x + \frac{1}{x}$ nejmenší hodnoty?

Řešení.

Snadno se přesvědčíme, že naše úloha je ekvivalentní následujícímu problému:

Najděte nejmenší hodnotu reálného parametru p (a odpovídající x) tak, aby rovnice $x + \frac{1}{x} = p$ (s neznámou x a parametrem p) měla kladné řešení.

Rovnici $x + \frac{1}{x} = p$ si můžeme přepsat do tvaru $x^2 - px + 1 = 0$, což je rovnice kvadratická.

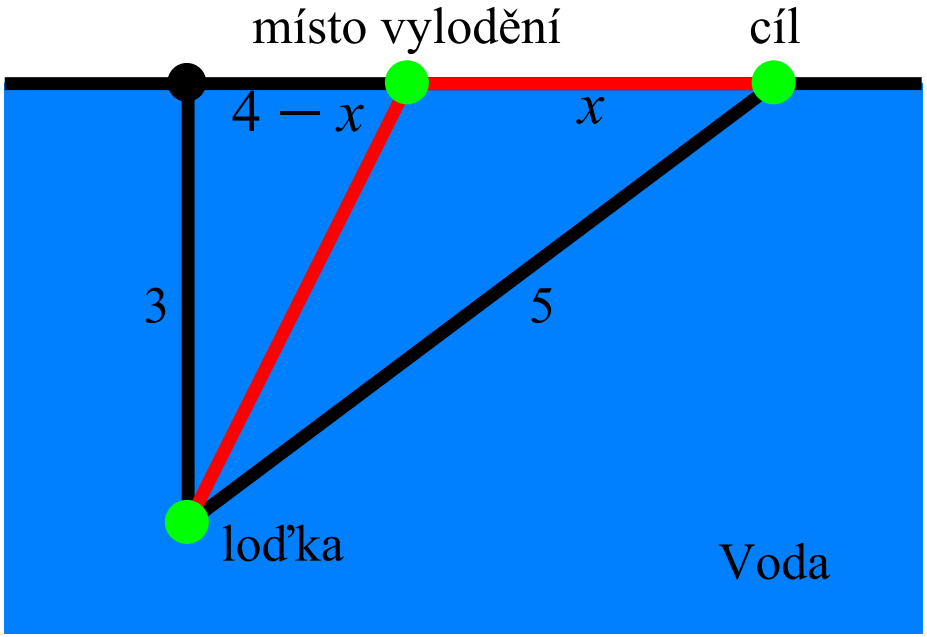
Pokud chceme, aby tato kvadratická rovnice měla řešení, musí být její diskriminant $D = p^2 - 4$ nezáporný, což nás vede k podmínce $p \in (-\infty, -2\rangle \cup \langle 2, +\infty)$.

V případě, že $p \in (-\infty, -2\rangle$, nemůžeme dostat kladné řešení x.
Proto musí platit $p \geq 2$.

Snadno se ale vidí, že pro $p = 2$ dostaneme řešení $x = 1$, což je odpověď na naši otázku. $\square$

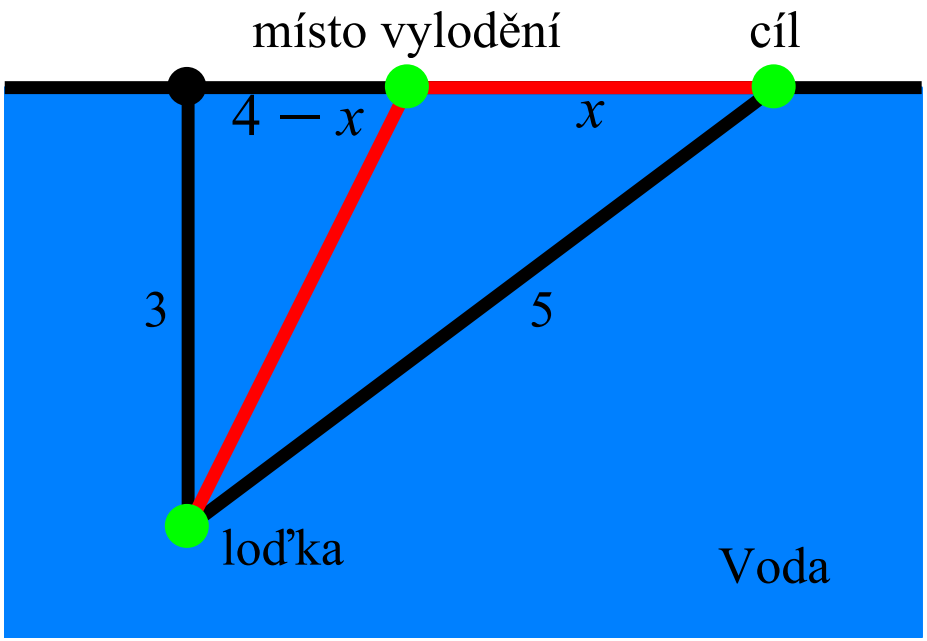
Příklad

Muž v loďce je vzdálen 3 km od pobřeží (majícího tvar přímky). Chce se co nejrychleji dostat do místa na pobřeží, které je od něj vzdáleno 5 km. Rozhodněte, kde se má vylodit, víte-li, že ve vodě se dokáže pohybovat rychlostí 3 km/h, zatímco po břehu rychlostí 5 km/h. Určete také čas, za který se dostane do cíle.



Příklad

Muž v loďce je vzdálen 3 km od pobřeží (majícího tvar přímky). Chce se co nejrychleji dostat do místa na pobřeží, které je od něj vzdáleno 5 km. Rozhodněte, kde se má vylodit, víte-li, že ve vodě se dokáže pohybovat rychlostí 3 km/h, zatímco po břehu rychlostí 5 km/h. Určete také čas, za který se dostane do cíle.



$$t(x) = \frac{\sqrt{(4-x)^2+9}}{3} + \frac{x}{5}, \quad \text{kde } x \in \langle 0, 4 \rangle.$$

Chceme najít minimum funkce $t(x) = \frac{\sqrt{(4-x)^2+9}}{3} + \frac{x}{5}$ na intervalu $\langle 0, 4 \rangle$.

Řešení.

Hledáme vlastně minimální hodnotu parametru $t \in \mathbb{R}^+$, pro kterou má rovnice

$$\frac{\sqrt{(4-x)^2+9}}{3} + \frac{x}{5} = t \qquad (\spadesuit)$$

řešení x ležící v intervalu $\langle 0, 4 \rangle$.

Chceme najít minimum funkce $t(x) = \frac{\sqrt{(4-x)^2+9}}{3} + \frac{x}{5}$ na intervalu $\langle 0, 4\rangle$.

Řešení.

Hledáme vlastně minimální hodnotu parametru $t \in \mathbb{R}^+$, pro kterou má rovnice

$$\frac{\sqrt{(4-x)^2+9}}{3} + \frac{x}{5} = t \qquad (\spadesuit)$$

řešení x ležící v intervalu $\langle 0, 4\rangle$.

Důsledkovými úpravami dostaneme z $(\spadesuit)$ rovnici

$$16x^2 + 10x(9t - 20) - 25(9t^2 - 25) = 0$$

Chceme najít minimum funkce $t(x) = \frac{\sqrt{(4-x)^2+9}}{3} + \frac{x}{5}$ na intervalu $\langle 0, 4\rangle$.

Řešení.

Hledáme vlastně minimální hodnotu parametru $t \in \mathbb{R}^+$, pro kterou má rovnice

$$\frac{\sqrt{(4-x)^2+9}}{3} + \frac{x}{5} = t \qquad (\spadesuit)$$

řešení x ležící v intervalu $\langle 0, 4\rangle$.

Důsledkovými úpravami dostaneme z $(\spadesuit)$ rovnici

$$16x^2 + 10x(9t - 20) - 25(9t^2 - 25) = 0$$

s diskriminantem

$$D = 100(9t - 20)^2 + 1600(9t^2 - 25) = 22500t^2 - 36000t = 4500t(5t - 8).$$

Chceme najít minimum funkce $t(x) = \frac{\sqrt{(4-x)^2+9}}{3} + \frac{x}{5}$ na intervalu $\langle 0, 4\rangle$.

Řešení.

Hledáme vlastně minimální hodnotu parametru $t \in \mathbb{R}^+$, pro kterou má rovnice

$$\frac{\sqrt{(4-x)^2+9}}{3} + \frac{x}{5} = t \qquad (\spadesuit)$$

řešení x ležící v intervalu $\langle 0, 4\rangle$.

Důsledkovými úpravami dostaneme z $(\spadesuit)$ rovnici

$$16x^2 + 10x(9t - 20) - 25(9t^2 - 25) = 0$$

s diskriminantem

$$D = 100(9t - 20)^2 + 1600(9t^2 - 25) = 22500t^2 - 36000t = 4500t(5t - 8).$$

Aby však rovnice $(\spadesuit)$ měla řešení, musí nutně platit $D \geq 0$, tzn. $t \geq \frac{8}{5}$.

Chceme najít minimum funkce $t(x) = \frac{\sqrt{(4-x)^2+9}}{3} + \frac{x}{5}$ na intervalu $\langle 0, 4\rangle$.

Řešení.

Hledáme vlastně minimální hodnotu parametru $t \in \mathbb{R}^+$, pro kterou má rovnice

$$\frac{\sqrt{(4-x)^2+9}}{3} + \frac{x}{5} = t \qquad (\spadesuit)$$

řešení x ležící v intervalu $\langle 0, 4\rangle$.

Důsledkovými úpravami dostaneme z $(\spadesuit)$ rovnici

$$16x^2 + 10x(9t - 20) - 25(9t^2 - 25) = 0$$

s diskriminantem

$$D = 100(9t - 20)^2 + 1600(9t^2 - 25) = 22500t^2 - 36000t = 4500t(5t - 8).$$

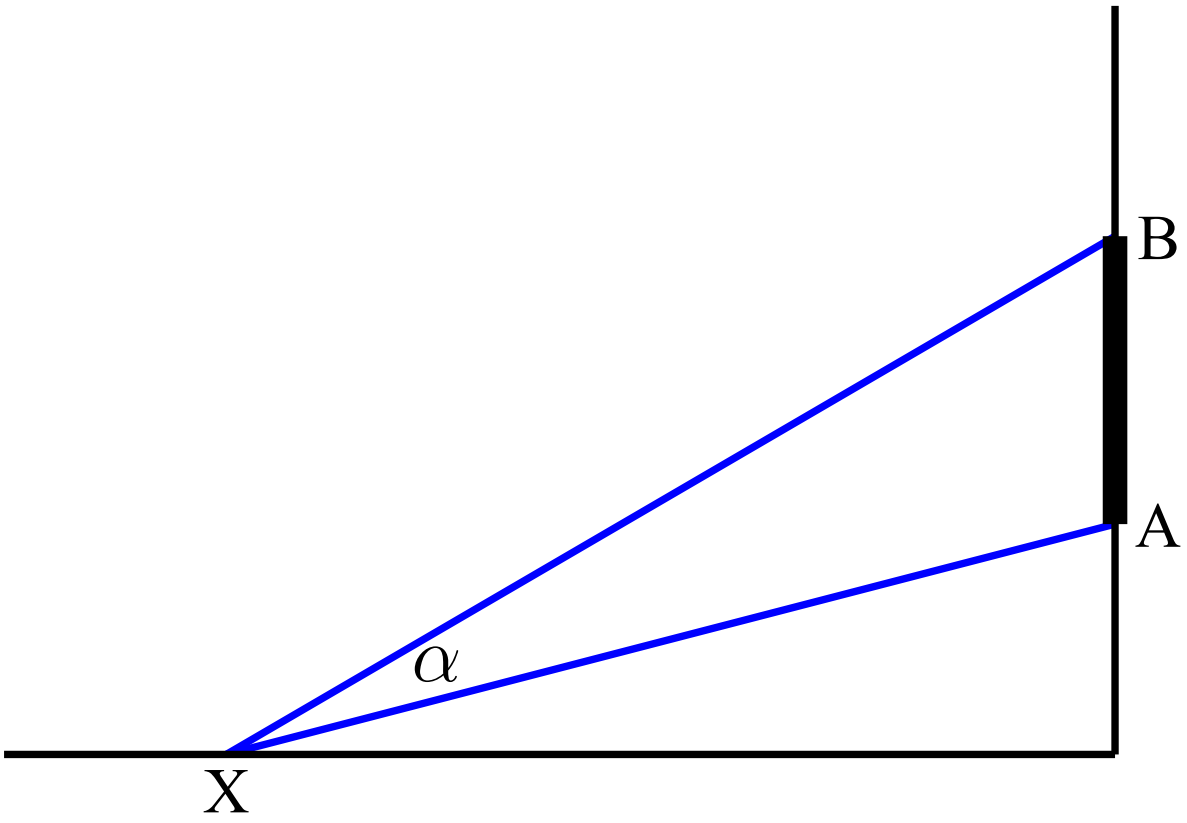
Aby však rovnice $(\spadesuit)$ měla řešení, musí nutně platit $D \geq 0$, tzn. $t \geq \frac{8}{5}$.

Zároveň snadno zjistíme, že pro $t = \frac{8}{5}$ má rovnice $(\spadesuit)$ řešení $x = \frac{7}{4}$. $\square$

Extremální úlohy řešené geometricky

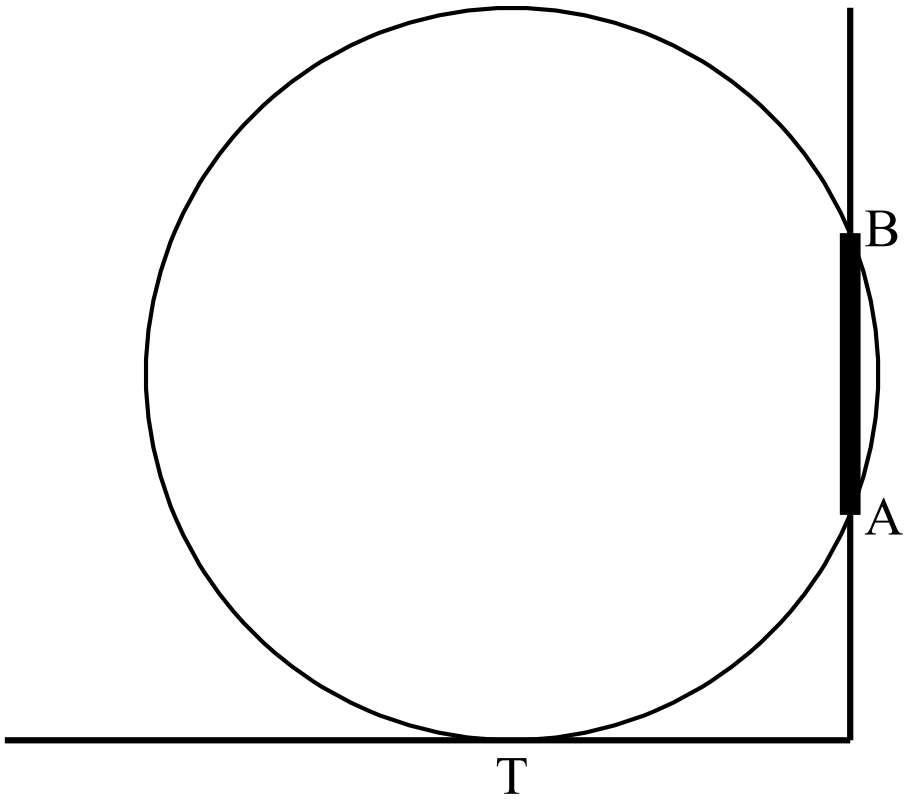
Příklad

Na zdi je zavěšen obraz. Jeho spodní okraj A se nachází a délkových jednotek nad úrovní očí a jeho horní okraj B se nachází b délkových jednotek nad úrovní očí. Určete, z jaké vzdálenosti je obraz vidět pod největším zorným úhlem.



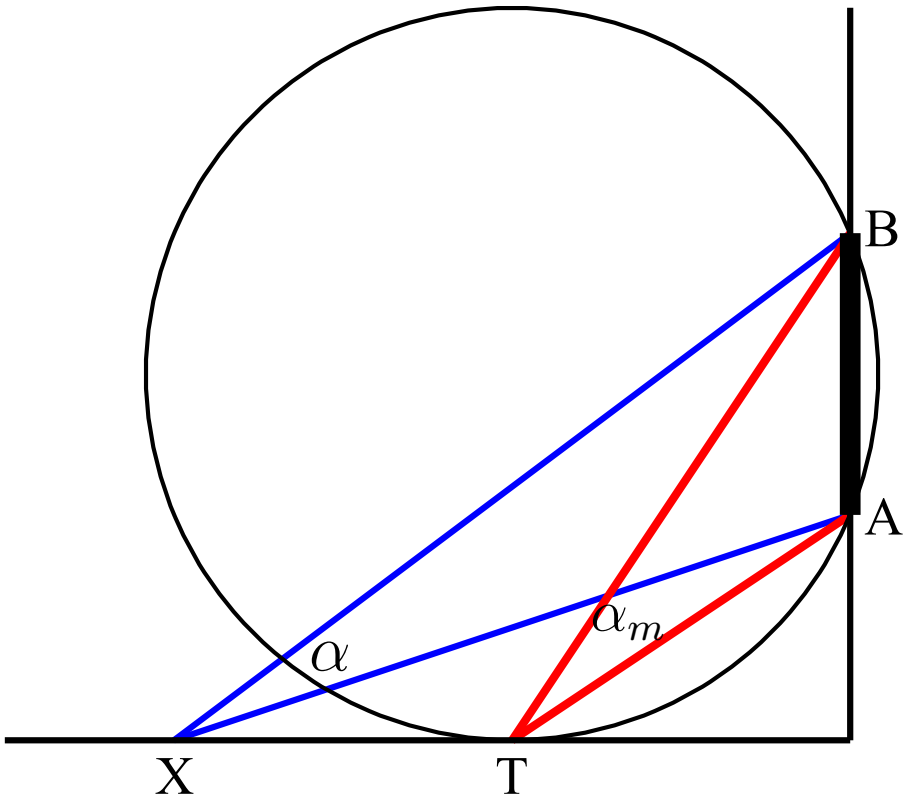
Řešení.

Řešení je založeno na rozboru následujícího obrázku.



Řešení.

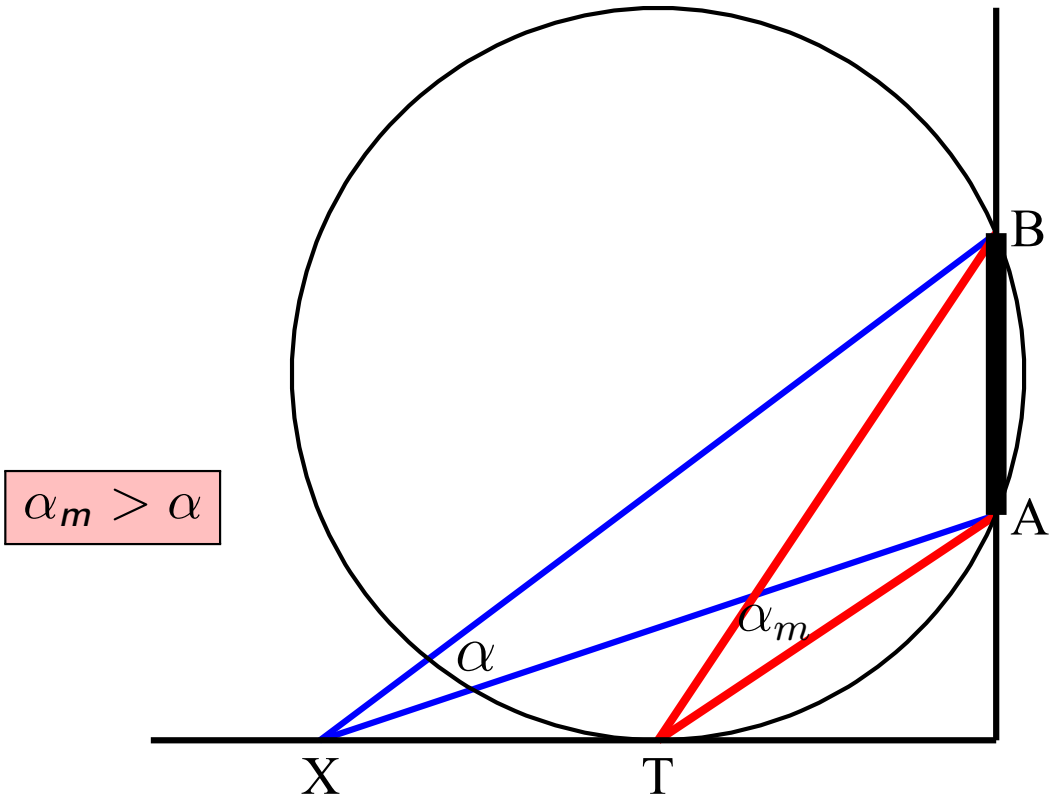
Řešení je založeno na rozboru následujícího obrázku.



Vezmeme-li v úvahu znalosti o obvodových a středových úhlech, dostaneme, že optimální je pozorovat obraz z bodu T (bod dotyku). Z tohoto bodu bude obraz vidět pod největším zorným úhlem. Vzdálenost bodu T od zdi je možné dopočítat např. pomocí mocnosti bodu ke kružnici.

Řešení.

Řešení je založeno na rozboru následujícího obrázku.



Vezmeme-li v úvahu znalosti o obvodových a středových úhlech, dostaneme, že optimální je pozorovat obraz z bodu T (bod dotyku). Z tohoto bodu bude obraz vidět pod největším zorným úhlem. Vzdálenost bodu T od zdi je možné dopočítat např. pomocí mocnosti bodu ke kružnici. □

Řešení pomocí AG nerovnosti.

Označme x naši vzdálenost od zdi a α úhel, pod kterým vidíme obraz.
Z goniometrických vzorců je možné odvodit, že

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\frac{b}{x} - \frac{a}{x}}{1 + \frac{b}{x} \cdot \frac{a}{x}} = \frac{x(b-a)}{x^2 + ab}.$$

Řešení pomocí AG nerovnosti.

Označme x naši vzdálenost od zdi a α úhel, pod kterým vidíme obraz.
Z goniometrických vzorců je možné odvodit, že

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\frac{b}{x} - \frac{a}{x}}{1 + \frac{b}{x} \cdot \frac{a}{x}} = \frac{x(b-a)}{x^2 + ab}.$$

Nyní použijme na jmenovatele AG nerovnost ve tvaru $x^2 + ab \geq 2x\sqrt{ab}$.
Poznamenejme, že v této nerovnosti nastává rovnost právě tehdy, když $x^2 = ab$.

Řešení pomocí AG nerovnosti.

Označme x naši vzdálenost od zdi a α úhel, pod kterým vidíme obraz.
Z goniometrických vzorců je možné odvodit, že

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\frac{b}{x} - \frac{a}{x}}{1 + \frac{b}{x} \cdot \frac{a}{x}} = \frac{x(b-a)}{x^2 + ab}.$$

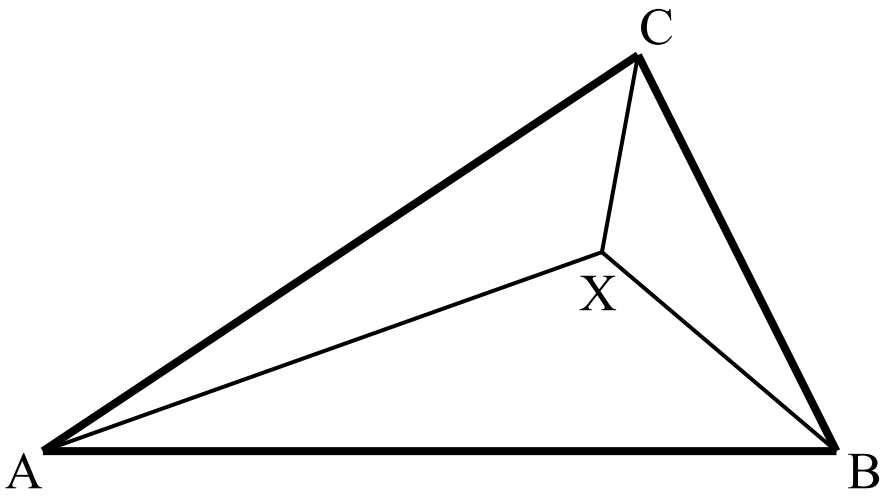
Nyní použijme na jmenovatele AG nerovnost ve tvaru $x^2 + ab \geq 2x\sqrt{ab}$.
Poznamenejme, že v této nerovnosti nastává rovnost právě tehdy, když $x^2 = ab$.
Celkem tedy dostáváme

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{x(b-a)}{x^2 + ab} \leq \frac{x(b-a)}{2x\sqrt{ab}} = \frac{b-a}{2\sqrt{ab}} = konst.,$$

přičemž rovnost nastává právě tehdy, když $x = \sqrt{ab}$, což je vzdálenost, pro kterou je $\operatorname{tg}\alpha$ (a tedy i samotné α) maximální. $\square$

Příklad

Je dán ostroúhlý trojúhelník ABC. Uvnitř tohoto trojúhelníku najděte bod X, pro který je součet $|AX| + |BX| + |CX|$ minimální.

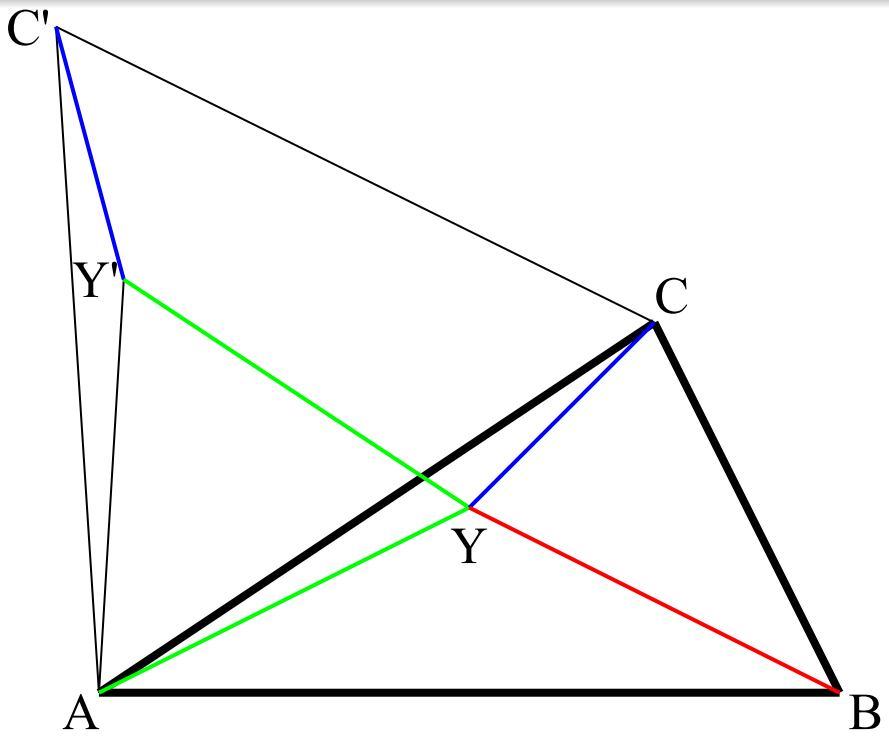


Příklad

Je dán ostroúhlý trojúhelník ABC. Uvnitř tohoto trojúhelníku najděte bod X, pro který je součet $|AX| + |BX| + |CX|$ minimální.

Řešení.

Nechť Y je libovolný vnitřní bod trojúhelníku ABC. Použijeme otočení kolem bodu A o 60 stupňů proti směru hodinových ručiček.

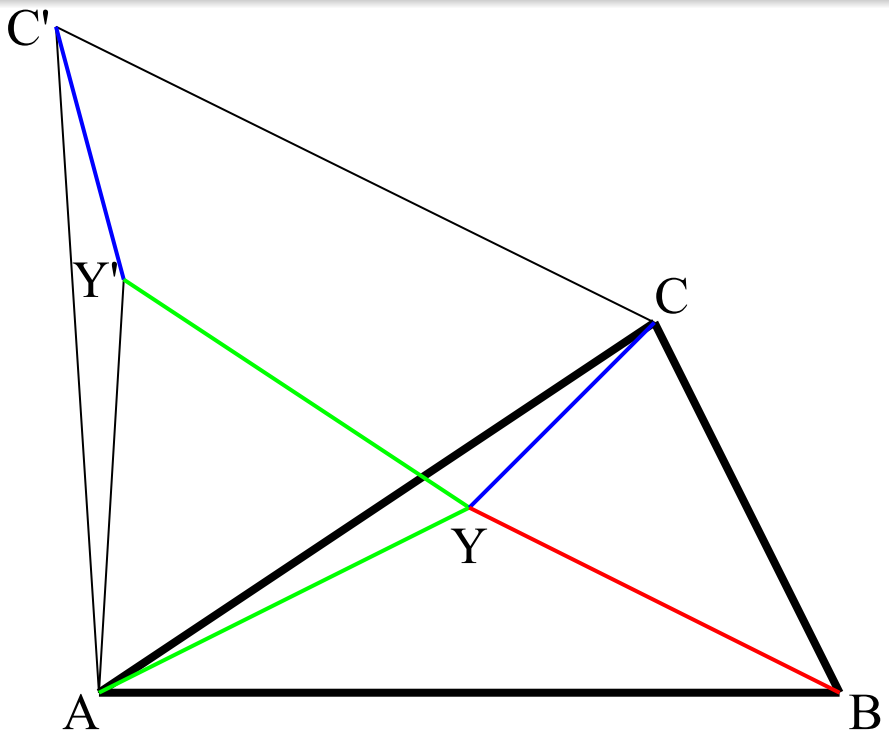


Příklad

Je dán ostroúhlý trojúhelník ABC. Uvnitř tohoto trojúhelníku najděte bod X, pro který je součet $|AX| + |BX| + |CX|$ minimální.

Řešení.

Nechť Y je libovolný vnitřní bod trojúhelníku ABC. Použijeme otočení kolem bodu A o 60 stupňů proti směru hodinových ručiček.



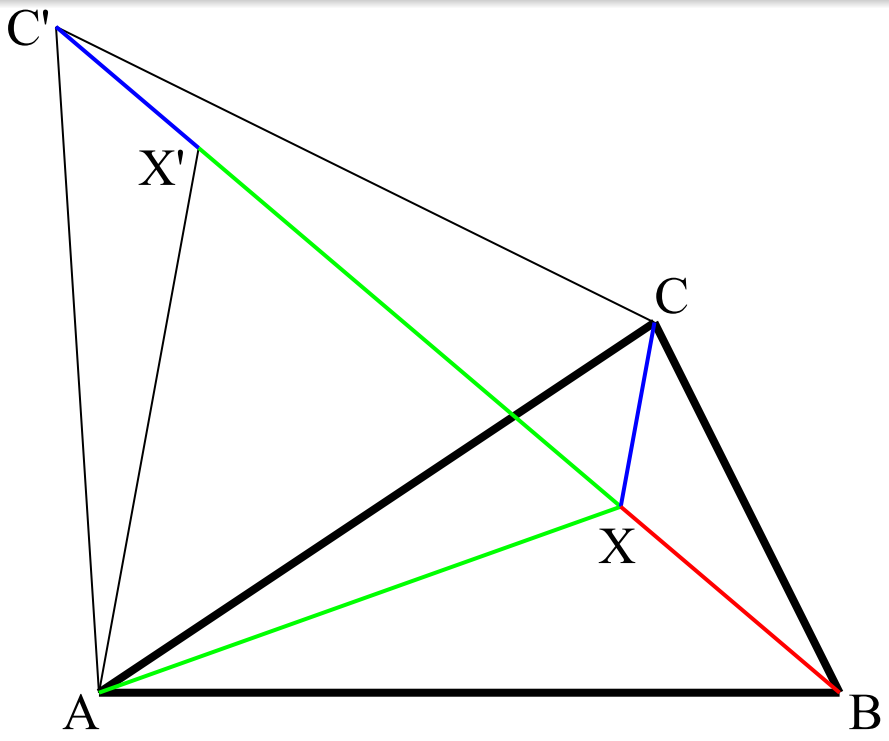
Jistě $|C'Y'| = |CY|$, $|Y'Y| = |AY|$, a tedy
$|AY| + |BY| + |CY| = |C'Y'| + |Y'Y| + |YB|$.

Příklad

Je dán ostroúhlý trojúhelník ABC. Uvnitř tohoto trojúhelníku najděte bod X, pro který je součet $|AX| + |BX| + |CX|$ minimální.

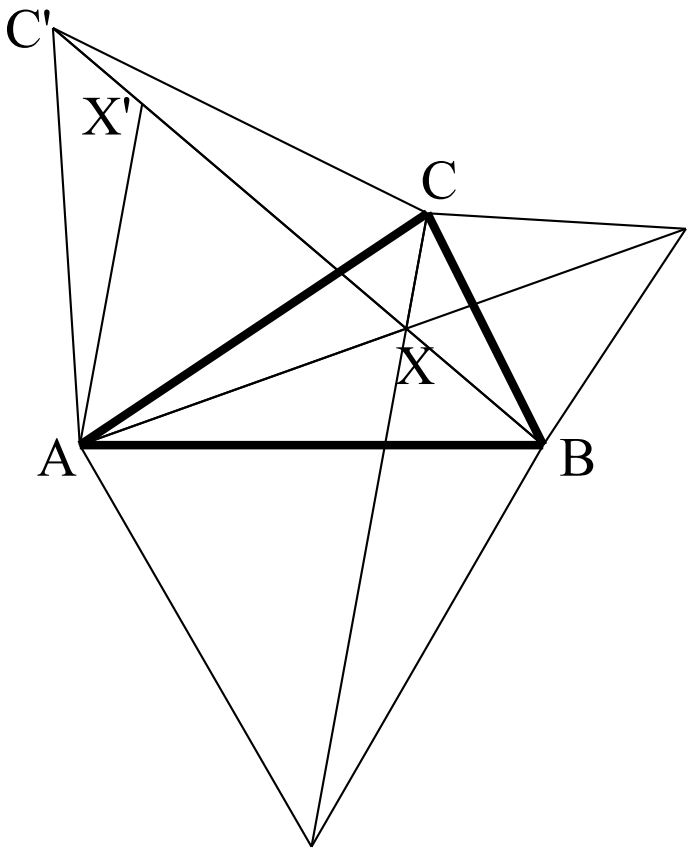
Řešení.

Nechť Y je libovolný vnitřní bod trojúhelníku ABC. Použijeme otočení kolem bodu A o 60 stupňů proti směru hodinových ručiček.



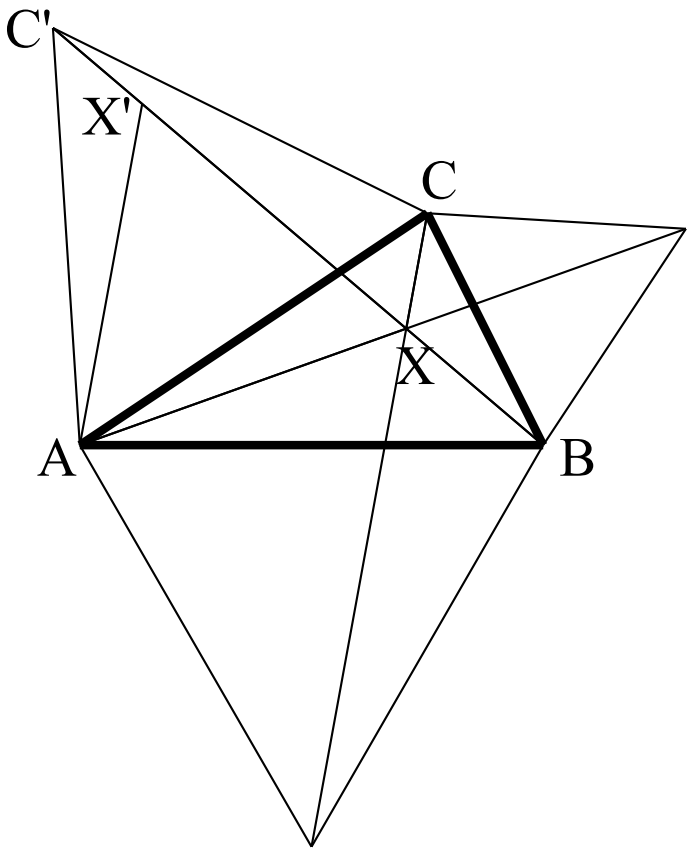
Jistě $|C'Y'| = |CY|$, $|Y'Y| = |AY|$, a tedy
$|AY| + |BY| + |CY| = |C'Y'| + |Y'Y| + |YB|$.

Vzhledem k symetrii úlohy si není obtížné uvědomit, že bod X, který hledáme, sestrojíme podle následujícího obrázku.



□

Vzhledem k symetrii úlohy si není obtížné uvědomit, že bod X, který hledáme, sestrojíme podle následujícího obrázku.



□

Poznámka

Bod X se nazývá Torricelliho bod. Pro takovýto bod pak navíc platí $|\angle AXB| = |\angle BXC| = |\angle CXA| = 120^\circ$.

Poznámka

Pokud bychom chtěli úlohu řešit analyticky (např. pro trojúhelník ABC, kde $A = (0,0)$, $B = (4,0)$, $C = (3,2)$), museli bychom hledat minimum funkce

$$f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} + \sqrt{(x-4)^2+y^2} + \sqrt{(x-3)^2+(y-2)^2},$$

což by bylo komplikované. (Vychází $f_{min} = \sqrt{17+8\sqrt{3}}$.)

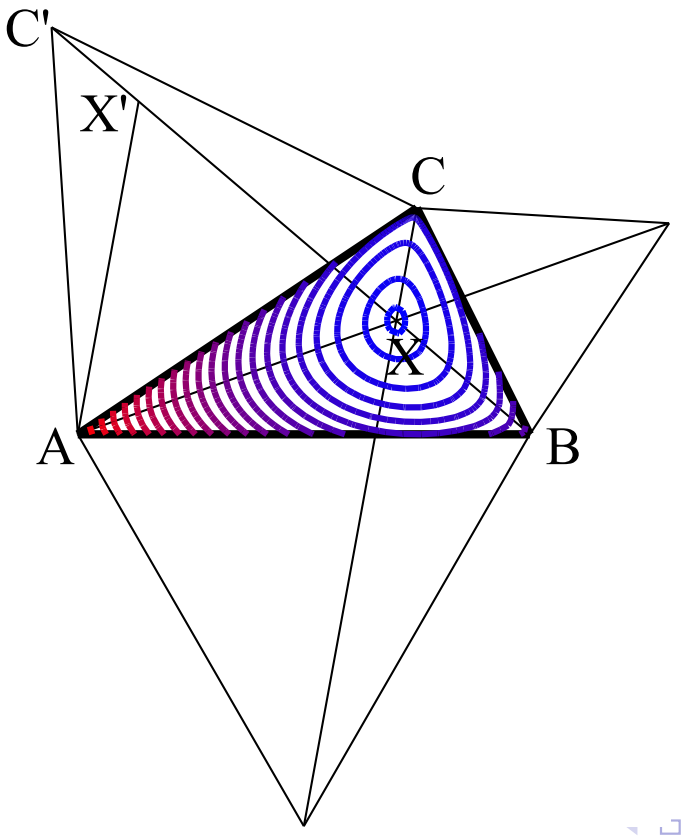
Poznámka

Pokud bychom chtěli úlohu řešit analyticky (např. pro trojúhelník ABC, kde $A = (0,0)$, $B = (4,0)$, $C = (3,2)$), museli bychom hledat minimum funkce

$$f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} + \sqrt{(x-4)^2+y^2} + \sqrt{(x-3)^2+(y-2)^2},$$

což by bylo komplikované. (Vychází $f_{min} = \sqrt{17+8\sqrt{3}}$.)

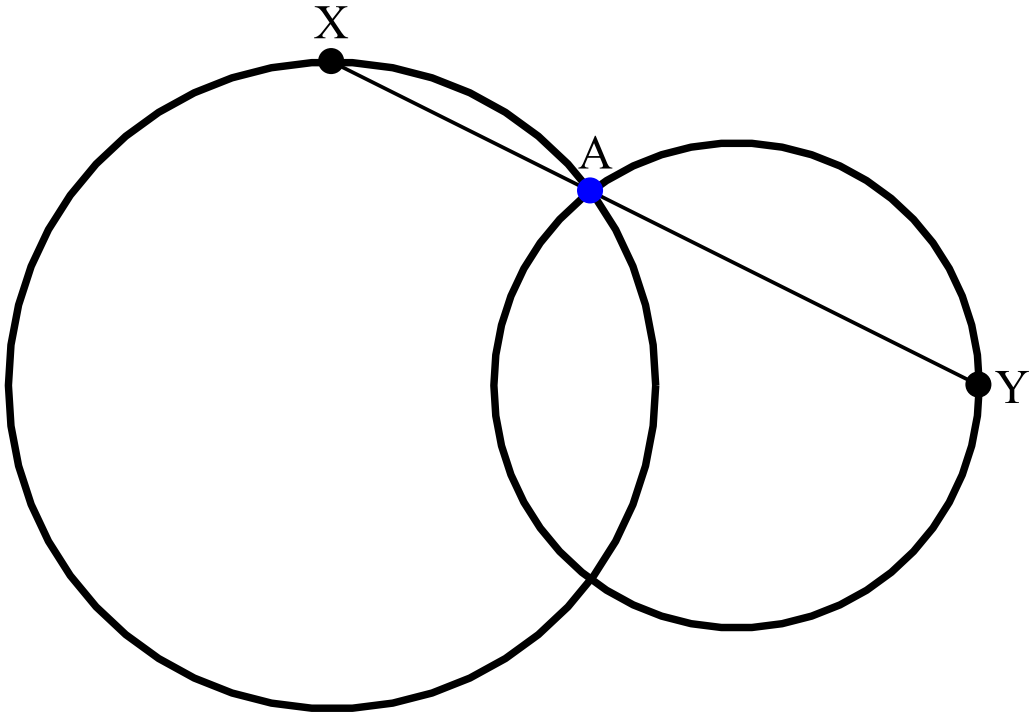
Pro ilustraci si ukažme vrstevnice funkce f v trojúhelníku ABC.



Další extrémální úlohy, které je možné řešit geometricky

Příklad

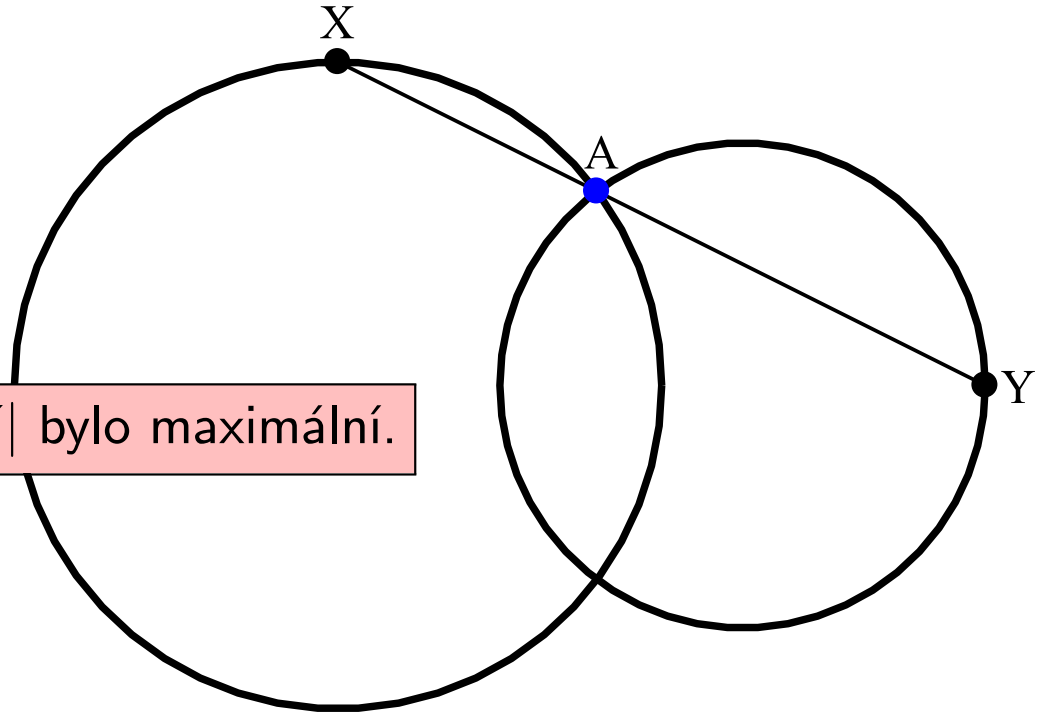
Jsou dány dvě kružnice mající dva společné body. Jedním z nich veďte přímku tak, aby úsečka XY vyťatá kružnicemi měla největší délku (viz obrázek).



Další extrémální úlohy, které je možné řešit geometricky

Příklad

Jsou dány dvě kružnice mající dva společné body. Jedním z nich veďte přímku tak, aby úsečka XY vyťatá kružnicemi měla největší délku (viz obrázek).

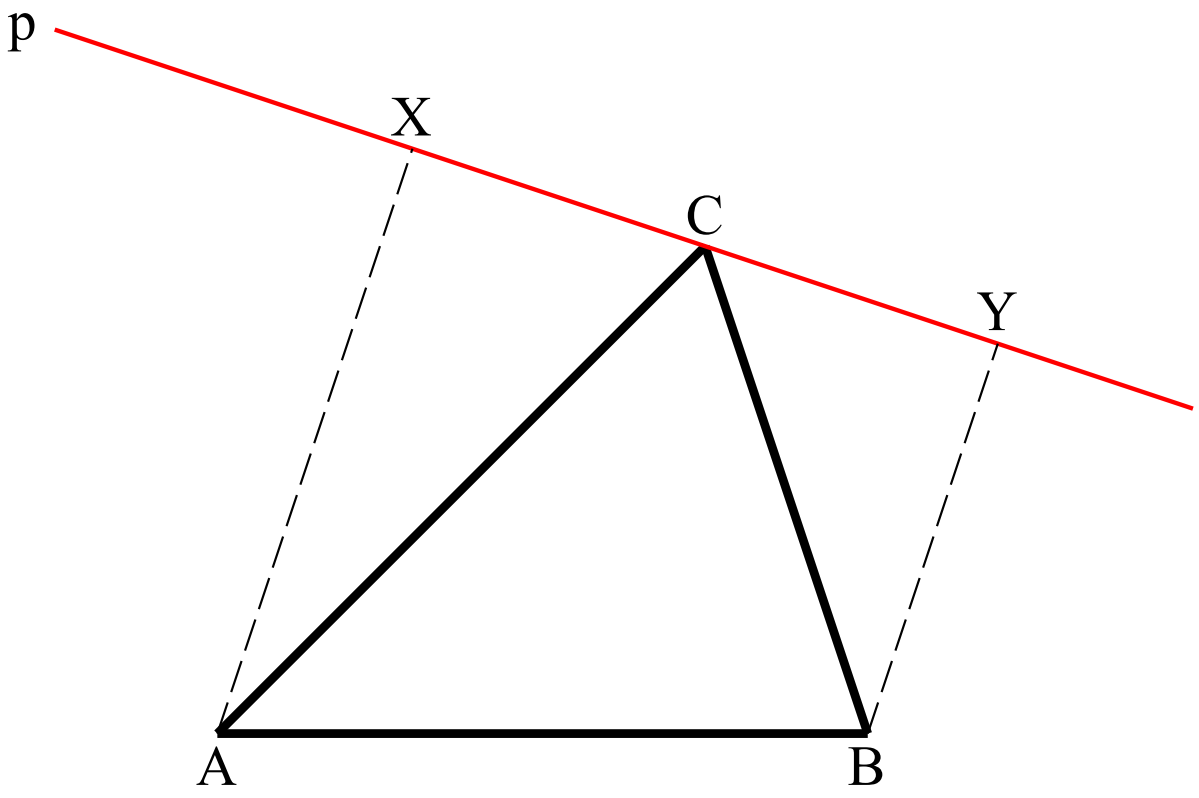


Chceme, aby $|XY|$ bylo maximální.

Další extrémální úlohy, které je možné řešit geometricky

Příklad

Je dán ostroúhlý trojúhelník ABC. Bodem C veďte přímku p tak, aby s trojúhelníkem ABC měla pouze jeden společný bod (bod C) a přitom byl součet vzdáleností bodů A a B od přímky p maximální (viz obrázek).



Zdroj

- Přednášky pro řešitele matematické olympiády, Jevíčko, červen 1994.

Děkuji za pozornost.