Asymetrické šifrování

Petr Vodstrčil

petr.vodstrcil@vsb.cz

Katedra aplikované matematiky, Fakulta elektrotechniky a informatiky,
Vysoká škola báňská–Technická univerzita Ostrava

Letní matematické soustředění

Dolní Morava, 12.6. 2018

Základní pojmy

Nejprve bude potřeba udělat si jasno v některých pojmech.

Základní pojmy

Nejprve bude potřeba udělat si jasno v některých pojmech.

- přirozená čísla ($\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$), celá čísla ($\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$)

Základní pojmy

Nejprve bude potřeba udělat si jasno v některých pojmech.

- přirozená čísla ($\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$), celá čísla ($\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$)
- dělitelnost, symbol $a|b$, zbytek po dělení, kongruence

Základní pojmy

Nejprve bude potřeba udělat si jasno v některých pojmech.

- přirozená čísla ($\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$), celá čísla ($\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$)
- dělitelnost, symbol $a|b$, zbytek po dělení, kongruence
- prvočísla

Základní pojmy

Nejprve bude potřeba udělat si jasno v některých pojmech.

- přirozená čísla ($\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$), celá čísla ($\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$)
- dělitelnost, symbol $a|b$, zbytek po dělení, kongruence
- prvočísla
- společný dělitel čísel a a b, největší společný dělitel ($\text{nsd}(a, b)$), nesoudělná čísla

Základní pojmy

Nejprve bude potřeba udělat si jasno v některých pojmech.

- přirozená čísla ($\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$), celá čísla ($\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$)
- dělitelnost, symbol $a|b$, zbytek po dělení, kongruence
- prvočísla
- společný dělitel čísel a a b, největší společný dělitel ($\mathrm{nsd}(a, b)$), nesoudělná čísla
- Eukleidův algoritmus

Základní pojmy

Nejprve bude potřeba udělat si jasno v některých pojmech.

- přirozená čísla ($\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$), celá čísla ($\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$)
- dělitelnost, symbol $a|b$, zbytek po dělení, kongruence
- prvočísla
- společný dělitel čísel a a b, největší společný dělitel ($\mathrm{nsd}(a, b)$), nesoudělná čísla
- Eukleidův algoritmus

Věta. (Bézoutova rovnost)

Nechť $a, b \in \mathbb{N}$. *Pak existují čísla* $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ *(Bézoutovy koeficienty) taková, že*

$$\alpha a + \beta b = \mathsf{nsd}(a, b).$$

Věta. (Bézoutova rovnost)

Nechť $a, b \in \mathbb{N}$. Pak existují čísla $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ (Bézoutovy koeficienty) taková, že

$$\alpha a + \beta b = \mathsf{nsd}(a, b).$$

Poznámka.

Čísla α a β se hledají Eukleidovým algoritmem.

Věta. (Bézoutova rovnost)

Nechť $a, b \in \mathbb{N}$. Pak existují čísla $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ (Bézoutovy koeficienty) taková, že

$$\alpha a + \beta b = \mathsf{nsd}(a, b).$$

Poznámka.

Čísla α a β se hledají Eukleidovým algoritmem.

Příklad.

Najděte Bézoutovy koeficienty α a β v případě, že $a = 19$ a $b = 27$.

Věta. (Bézoutova rovnost)

Nechť $a, b \in \mathbb{N}$. Pak existují čísla $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ (Bézoutovy koeficienty) taková, že

$$\alpha a + \beta b = \mathrm{nsd}(a, b).$$

Poznámka.

Čísla α a β se hledají Eukleidovým algoritmem.

Příklad.

Najděte Bézoutovy koeficienty α a β v případě, že $a = 19$ a $b = 27$.

Příklad.

Pro přirozená čísla a, b, c dokažte následující implikaci:

$$a|bc \ \wedge \ \mathrm{nsd}(a, b) = 1 \quad \Longrightarrow \quad a|c.$$

Věta.

Každé přirozené číslo n, $n \geq 2$, lze jednoznačně (až na pořadí činitelů) psát ve tvaru

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k},$$

kde $p_1, p_2, \dots, p_k$ jsou vzájemně různá prvočísla a $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in \mathbb{N}$.

Věta.

Každé přirozené číslo n, $n \geq 2$, lze jednoznačně (až na pořadí činitelů) psát ve tvaru

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k},$$

kde $p_1, p_2, \dots, p_k$ jsou vzájemně různá prvočísla a $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in \mathbb{N}$.

Definice. (Eulerova funkce)

Nechť $n \in \mathbb{N}$ je libovolné. Označme M_n množinu takových čísel z $\{1, 2, \dots, n\}$, která jsou nesoudělná s n, tzn.

$$M_n = \{i \in \{1, 2, \dots, n\} : \mathrm{nsd}(i, n) = 1\}.$$

Eulerovu funkci φ pak definujeme

$$\varphi(n) = |M_n|. \qquad (\text{počet prvků množiny } M_n)$$

Věta.

Každé přirozené číslo n, $n \geq 2$, lze jednoznačně (až na pořadí činitelů) psát ve tvaru

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k},$$

kde $p_1, p_2, \dots, p_k$ jsou vzájemně různá prvočísla a $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in \mathbb{N}$.

Definice. (Eulerova funkce)

Nechť $n \in \mathbb{N}$ je libovolné. Označme M_n množinu takových čísel z $\{1, 2, \dots, n\}$, která jsou nesoudělná s n, tzn.

$$M_n = \{i \in \{1, 2, \dots, n\} : \mathrm{nsd}(i, n) = 1\}.$$

Eulerovu funkci φ pak definujeme

$$\varphi(n) = |M_n|. \qquad (\textit{počet prvků množiny } M_n)$$

Příklad.

$\varphi(1) = 1, \quad \varphi(19) = 18, \quad \varphi(20) = 8, \quad \varphi(2018) = ?, \quad \varphi(1000000) = ?$

Věta.

Nechť $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, má prvočíselný rozklad $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$. Pak

$$\varphi(n) = n \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{p_k}\right).$$

Věta.

Nechť $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, *má prvočíselný rozklad* $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$. *Pak*

$$\varphi(n) = n \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{p_k}\right).$$

Příklad.

Protože $1000000 = 10^6 = 2^6 \cdot 5^6$, *je*

$$\varphi(1000000) = 1000000 \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{5}\right) = 1000000 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} = 400000.$$

Věta.

Nechť $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, *má prvočíselný rozklad* $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$. *Pak*

$$\varphi(n) = n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right)\dots\left(1 - \frac{1}{p_k}\right).$$

Příklad.

Protože $1000000 = 10^6 = 2^6 \cdot 5^6$, *je*

$$\varphi(1000000) = 1000000\left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{5}\right) = 1000000 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} = 400000.$$

Věta.

Je-li n *součinem dvou různých prvočísel* p, q, *pak*

$$\varphi(n) = (p-1)(q-1).$$

Věta.

Nechť $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, má prvočíselný rozklad $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$. Pak

$$\varphi(n) = n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right)\dots\left(1 - \frac{1}{p_k}\right).$$

Příklad.

Protože $1000000 = 10^6 = 2^6 \cdot 5^6$, je

$$\varphi(1000000) = 1000000\left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{5}\right) = 1000000 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} = 400000.$$

Věta.

Je-li n součinem dvou různých prvočísel p, q, pak

$$\varphi(n) = (p-1)(q-1).$$

Důkaz.

Víme, že $\varphi(n) = n\left(1 - \frac{1}{p}\right)\left(1 - \frac{1}{q}\right) = pq \cdot \frac{p-1}{p} \cdot \frac{q-1}{q} = (p-1)(q-1).$ □

Vygenerování veřejného a tajného klíče

- Zvolíme dvě dostatečně velká a vzájemně různá prvočísla p, q a položíme $n = pq$.

Vygenerování veřejného a tajného klíče

- Zvolíme dvě dostatečně velká a vzájemně různá prvočísla p, q a položíme $n = pq$.
- Dopočítáme $\varphi(n) = (p-1)(q-1)$.

Vygenerování veřejného a tajného klíče

- Zvolíme dvě dostatečně velká a vzájemně různá prvočísla p, q a položíme $n = pq$.
- Dopočítáme $\varphi(n) = (p-1)(q-1)$.
- Náhodně vybereme číslo $v \in \mathbb{N}$, které je nesoudělné s $\varphi(n)$.

Vygenerování veřejného a tajného klíče

- Zvolíme dvě dostatečně velká a vzájemně různá prvočísla p, q a položíme $n = pq$.
- Dopočítáme $\varphi(n) = (p-1)(q-1)$.
- Náhodně vybereme číslo $v \in \mathbb{N}$, které je nesoudělné s $\varphi(n)$.
- K číslu v najdeme číslo $t \in \mathbb{N}$ tak, aby součin vt dával po dělení číslem $\varphi(n)$ zbytek 1. To lze díky Bézoutově rovnosti.

Vygenerování veřejného a tajného klíče

- Zvolíme dvě dostatečně velká a vzájemně různá prvočísla p, q a položíme $n = pq$.
- Dopočítáme $\varphi(n) = (p-1)(q-1)$.
- Náhodně vybereme číslo $v \in \mathbb{N}$, které je nesoudělné s $\varphi(n)$.
- K číslu v najdeme číslo $t \in \mathbb{N}$ tak, aby součin vt dával po dělení číslem $\varphi(n)$ zbytek 1. To lze díky Bézoutově rovnosti.

Vygenerování veřejného a tajného klíče

- Zvolíme dvě dostatečně velká a vzájemně různá prvočísla p, q a položíme $n = pq$.
- Dopočítáme $\varphi(n) = (p-1)(q-1)$.
- Náhodně vybereme číslo $v \in \mathbb{N}$, které je nesoudělné s $\varphi(n)$.
- K číslu v najdeme číslo $t \in \mathbb{N}$ tak, aby součin vt dával po dělení číslem $\varphi(n)$ zbytek 1. To lze díky Bézoutově rovnosti.

Dvojice (v, n) bude veřejný klíč – můžeme jej šířit.

Vygenerování veřejného a tajného klíče

- Zvolíme dvě dostatečně velká a vzájemně různá prvočísla p, q a položíme $n = pq$.
- Dopočítáme $\varphi(n) = (p-1)(q-1)$.
- Náhodně vybereme číslo $v \in \mathbb{N}$, které je nesoudělné s $\varphi(n)$.
- K číslu v najdeme číslo $t \in \mathbb{N}$ tak, aby součin vt dával po dělení číslem $\varphi(n)$ zbytek 1. To lze díky Bézoutově rovnosti.

Dvojice (v, n) bude veřejný klíč – můžeme jej šířit.

Dvojice (t, n) bude tajný klíč, který vlastníme pouze my.

Vygenerování veřejného a tajného klíče

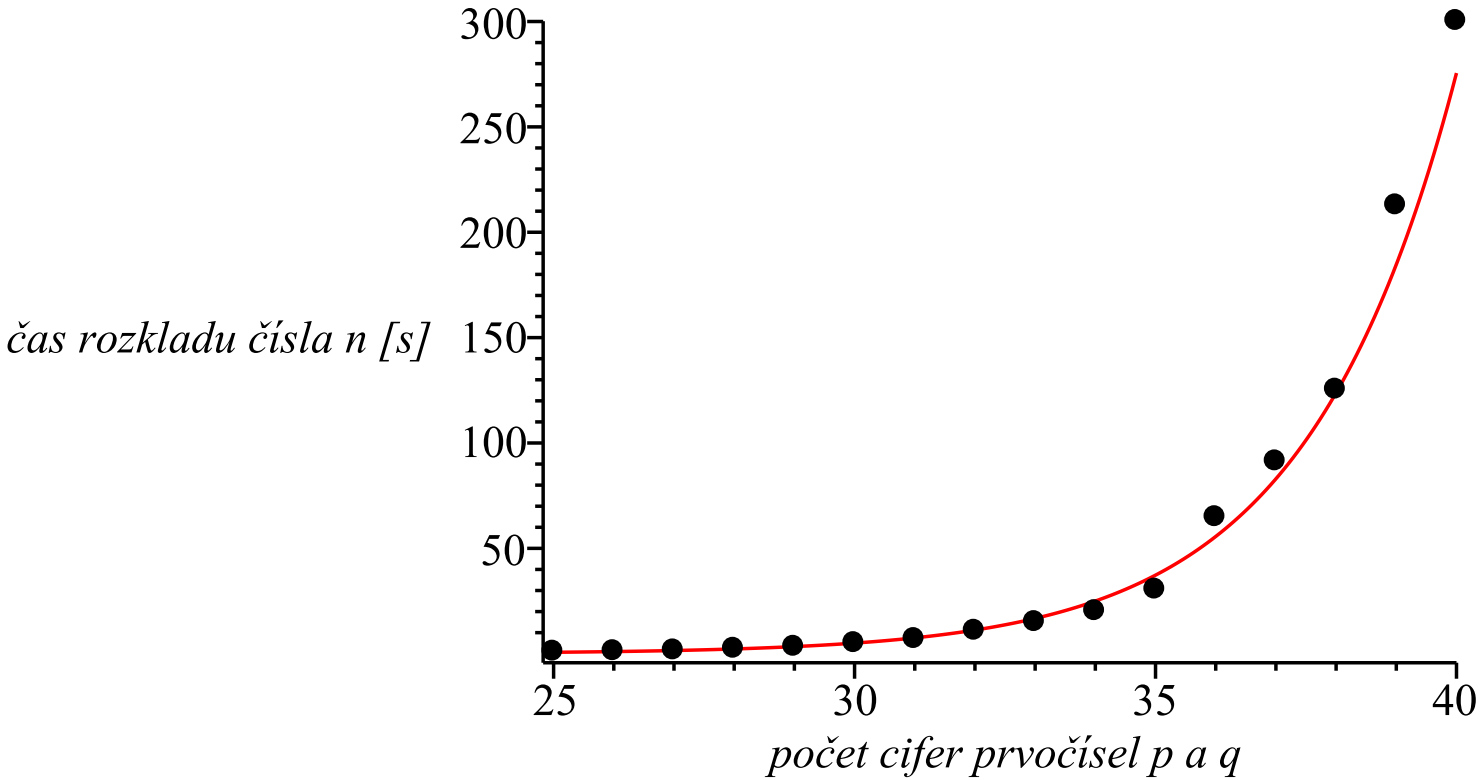
- Zvolíme dvě dostatečně velká a vzájemně různá prvočísla p, q a položíme $n = pq$.
- Dopočítáme $\varphi(n) = (p-1)(q-1)$.
- Náhodně vybereme číslo $v \in \mathbb{N}$, které je nesoudělné s $\varphi(n)$.
- K číslu v najdeme číslo $t \in \mathbb{N}$ tak, aby součin vt dával po dělení číslem $\varphi(n)$ zbytek 1. To lze díky Bézoutově rovnosti.

Dvojice (v, n) bude veřejný klíč – můžeme jej šířit.

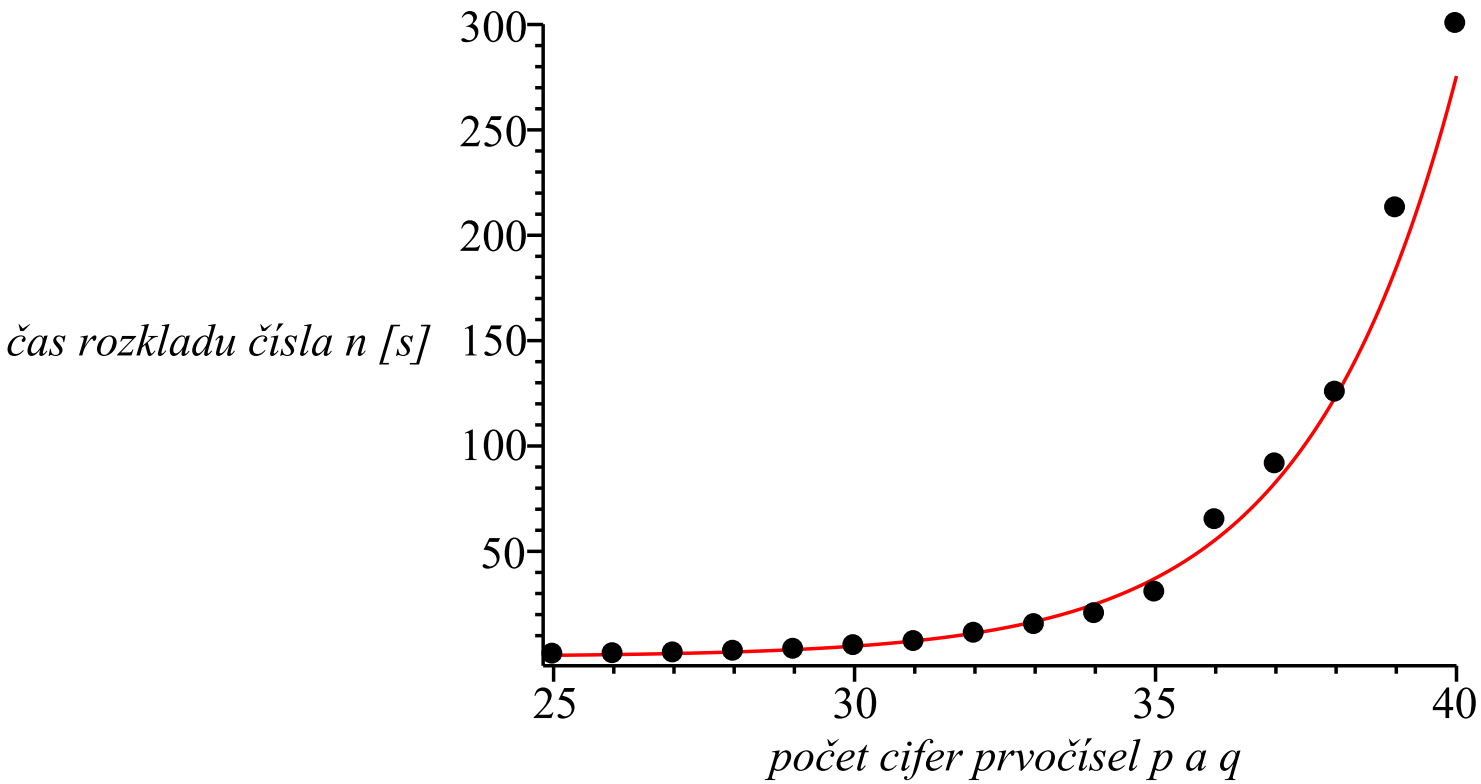
Dvojice (t, n) bude tajný klíč, který vlastníme pouze my.

Tajný klíč lze z veřejného dopočítat pouze v případě, že známe rozklad čísla n na prvočísla ($n = pq$). Zjištění tohoto rozkladu je však velmi časově náročné.

Časy potřebné k prolomení klíče

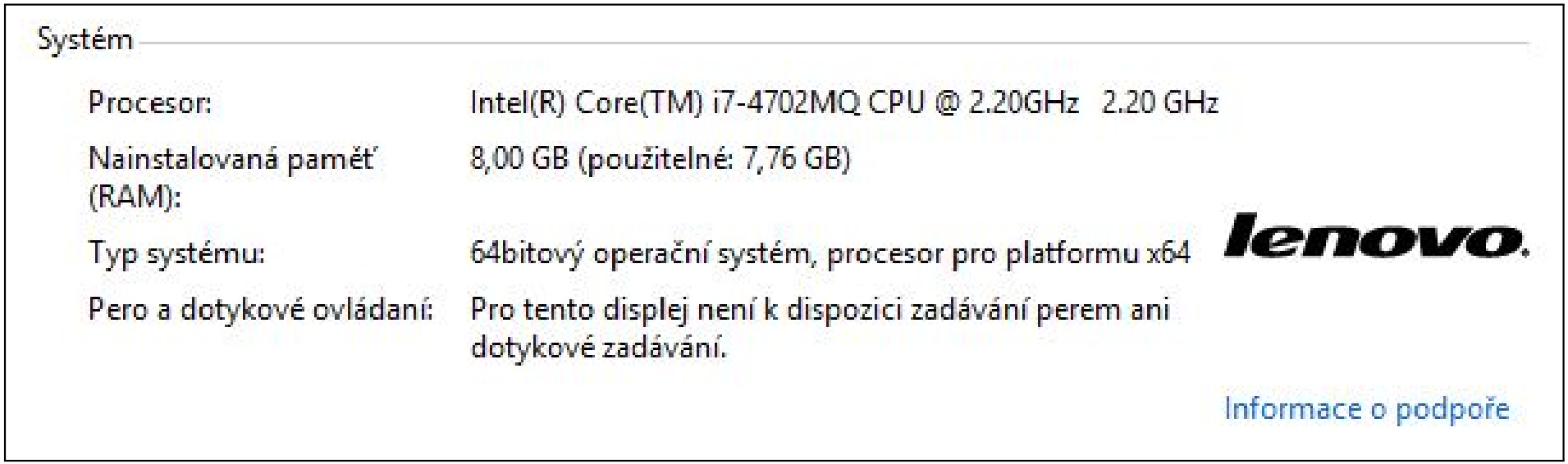


Časy potřebné k prolomení klíče



Pokud by prvočísla p a q byla 50-ti místná, trval by zpětný rozklad čísla n cca. 4 hodiny, pro 60-ti místná by to bylo 9,5 dne, pro 70-ti místná 1,5 roku a pro 80-ti místná 78 let....

Časy potřebné k prolomení klíče



Pokud by prvočísla p a q byla 50-ti místná, trval by zpětný rozklad čísla n cca. 4 hodiny, pro 60-ti místná by to bylo 9,5 dne, pro 70-ti místná 1,5 roku a pro 80-ti místná 78 let....

Princip (de)šifrování

Představme si situaci, že někomu chceme poslat důvěrnou zprávu.
Stáhneme si nejprve jeho veřejný klíč (v, n).

Princip (de)šifrování

Představme si situaci, že někomu chceme poslat důvěrnou zprávu.
Stáhneme si nejprve jeho veřejný klíč (v, n).

Předpokládejme, že posíláme zprávu z, kde $z \in \mathbb{N}$, $z < n$.

Princip (de)šifrování

Představme si situaci, že někomu chceme poslat důvěrnou zprávu.
Stáhneme si nejprve jeho veřejný klíč (v, n).

Předpokládejme, že posíláme zprávu z, kde $z \in \mathbb{N}$, $z < n$.

Vypočítáme zbytek čísla z^v po dělení číslem n. Tento zbytek (označme jej s) je hledaná šifra.

Princip (de)šifrování

Představme si situaci, že někomu chceme poslat důvěrnou zprávu.
Stáhneme si nejprve jeho veřejný klíč (v, n).

Předpokládejme, že posíláme zprávu z, kde $z \in \mathbb{N}$, $z < n$.

Vypočítáme zbytek čísla z^v po dělení číslem n. Tento zbytek (označme jej s) je hledaná šifra.

Příjemce obdrží zašifrovanou zprávu s a chce ji rozšifrovat.
K tomu potřebuje svůj tajný klíč (t, n).

Princip (de)šifrování

Představme si situaci, že někomu chceme poslat důvěrnou zprávu.
Stáhneme si nejprve jeho veřejný klíč (v, n).

Předpokládejme, že posíláme zprávu z, kde $z \in \mathbb{N}$, $z < n$.

Vypočítáme zbytek čísla z^v po dělení číslem n. Tento zbytek (označme jej s) je hledaná šifra.

Příjemce obdrží zašifrovanou zprávu s a chce ji rozšifrovat.
K tomu potřebuje svůj tajný klíč (t, n).

Příjemce vypočítá zbytek čísla s^t po dělení číslem n.
Lze ukázat, že tento zbytek je roven původní zprávě z.

Princip (de)šifrování

Představme si situaci, že někomu chceme poslat důvěrnou zprávu.
Stáhneme si nejprve jeho veřejný klíč (v, n).

Předpokládejme, že posíláme zprávu z, kde $z \in \mathbb{N}$, $z < n$.

Vypočítáme zbytek čísla z^v po dělení číslem n. Tento zbytek (označme jej s) je hledaná šifra.

Příjemce obdrží zašifrovanou zprávu s a chce ji rozšifrovat.
K tomu potřebuje svůj tajný klíč (t, n).

Příjemce vypočítá zbytek čísla s^t po dělení číslem n.
Lze ukázat, že tento zbytek je roven původní zprávě z.

Za vším je tzv. malá Fermatova věta, která říká, že pro každé přirozené číslo a a každé prvočíslo p je číslo $a^p - a$ dělitelné číslem p.

Příklad

Položme $\boxed{n = 7 \cdot 11 = 77.}$ Pak jistě $\varphi(n) = 6 \cdot 10 = 60$. Zvolme např. $\boxed{v = 17.}$
Jistě $\text{nsd}(17, 60) = 1$.

Pak $\boxed{t = 53}$, neboť $vt = 17 \cdot 53 = 901$ dává po dělení číslem $\varphi(n) = 60$ zbytek 1.
Číslo t jsme schopni spočítat pomocí Eukleidova algoritmu.

Příklad

Položme $\boxed{n = 7 \cdot 11 = 77.}$ Pak jistě $\varphi(n) = 6 \cdot 10 = 60$. Zvolme např. $\boxed{v = 17.}$
Jistě $\text{nsd}(17, 60) = 1$.

Pak $\boxed{t = 53}$, neboť $vt = 17 \cdot 53 = 901$ dává po dělení číslem $\varphi(n) = 60$ zbytek 1.
Číslo t jsme schopni spočítat pomocí Eukleidova algoritmu.

Dvojice $(17, 77)$ bude veřejný klíč a dvojice $(53, 77)$ bude tajný klíč.

Příklad

Položme $\boxed{n = 7 \cdot 11 = 77.}$ Pak jistě $\varphi(n) = 6 \cdot 10 = 60$. Zvolme např. $\boxed{v = 17.}$
Jistě $\text{nsd}(17, 60) = 1$.

Pak $\boxed{t = 53}$, neboť $vt = 17 \cdot 53 = 901$ dává po dělení číslem $\varphi(n) = 60$ zbytek 1.
Číslo t jsme schopni spočítat pomocí Eukleidova algoritmu.

Dvojice $(17, 77)$ bude veřejný klíč a dvojice $(53, 77)$ bude tajný klíč.

Nyní např. budeme chtít zašifrovat zprávu $z = 19$.

Příklad

Položme $\boxed{n = 7 \cdot 11 = 77.}$ Pak jistě $\varphi(n) = 6 \cdot 10 = 60$. Zvolme např. $\boxed{v = 17.}$ Jistě $\text{nsd}(17, 60) = 1$.

Pak $\boxed{t = 53}$, neboť $vt = 17 \cdot 53 = 901$ dává po dělení číslem $\varphi(n) = 60$ zbytek 1. Číslo t jsme schopni spočítat pomocí Eukleidova algoritmu.

Dvojice $(17, 77)$ bude veřejný klíč a dvojice $(53, 77)$ bude tajný klíč.

Nyní např. budeme chtít zašifrovat zprávu $z = 19$.

$z^v = 19^{17} = 548038685778480218593 9$. Zbytek tohoto čísla po dělení číslem 77 je 24. Zašifrovaná zpráva má tedy hodnotu $s = 24$.

Příklad

Položme $\boxed{n = 7 \cdot 11 = 77.}$ Pak jistě $\varphi(n) = 6 \cdot 10 = 60$. Zvolme např. $\boxed{v = 17.}$ Jistě $\text{nsd}(17, 60) = 1$.

Pak $\boxed{t = 53}$, neboť $vt = 17 \cdot 53 = 901$ dává po dělení číslem $\varphi(n) = 60$ zbytek 1. Číslo t jsme schopni spočítat pomocí Eukleidova algoritmu.

Dvojice $(17, 77)$ bude veřejný klíč a dvojice $(53, 77)$ bude tajný klíč.

Nyní např. budeme chtít zašifrovat zprávu $z = 19$.

$z^v = 19^{17} = 5480386857784802185939$. Zbytek tohoto čísla po dělení číslem 77 je 24. Zašifrovaná zpráva má tedy hodnotu $s = 24$.

Dešifrování:

$s^t = 24^{53} = 141643226400507398135276158731018339567760144309965258224594442969667338 24.$
Zbytek po dělení číslem 77 je 19, což je hodnota původní zprávy.

Výpočet zbytků

Problém je, jak efektivně vypočítat např. zbytek čísla 24^{53} po dělení číslem 77.

Výpočet zbytků

Problém je, jak efektivně vypočítat např. zbytek čísla 24^{53} po dělení číslem 77.

Platí (všechny výpočty provádíme „modulo 77“)

$$24^2 = 576 \equiv 37$$

Výpočet zbytků

Problém je, jak efektivně vypočítat např. zbytek čísla 24^{53} po dělení číslem 77.

Platí (všechny výpočty provádíme „modulo 77“)

$$24^2 = 576 \equiv 37 \implies 24^4 \equiv 37^2 = 1369 \equiv 60$$

Výpočet zbytků

Problém je, jak efektivně vypočítat např. zbytek čísla 24^{53} po dělení číslem 77.

Platí (všechny výpočty provádíme „modulo 77“)

$$24^2 = 576 \equiv 37 \implies 24^4 \equiv 37^2 = 1369 \equiv 60 \implies 24^8 \equiv 60^2 = 3600 \equiv 58$$

Výpočet zbytků

Problém je, jak efektivně vypočítat např. zbytek čísla 24^{53} po dělení číslem 77.

Platí (všechny výpočty provádíme „modulo 77“)

$$24^2 = 576 \equiv 37 \implies 24^4 \equiv 37^2 = 1369 \equiv 60 \implies 24^8 \equiv 60^2 = 3600 \equiv 58$$

$$\implies 24^{16} \equiv 58^2 = 3364 \equiv 53$$

Výpočet zbytků

Problém je, jak efektivně vypočítat např. zbytek čísla 24^{53} po dělení číslem 77.

Platí (všechny výpočty provádíme „modulo 77“)

$$24^2 = 576 \equiv 37 \implies 24^4 \equiv 37^2 = 1369 \equiv 60 \implies 24^8 \equiv 60^2 = 3600 \equiv 58$$

$$\implies 24^{16} \equiv 58^2 = 3364 \equiv 53 \implies 24^{32} \equiv 53^2 = 2809 \equiv 37.$$

Výpočet zbytků

Problém je, jak efektivně vypočítat např. zbytek čísla 24^{53} po dělení číslem 77.

Platí (všechny výpočty provádíme „modulo 77“)

$$24^2 = 576 \equiv 37 \implies 24^4 \equiv 37^2 = 1369 \equiv 60 \implies 24^8 \equiv 60^2 = 3600 \equiv 58$$

$$\implies 24^{16} \equiv 58^2 = 3364 \equiv 53 \implies 24^{32} \equiv 53^2 = 2809 \equiv 37.$$

Odtud snadno spočítáme, že

$$24^{53} = 24^{32} \cdot 24^{16} \cdot 24^4 \cdot 24^1 \equiv 37 \cdot 53 \cdot 60 \cdot 24 = 2823840 \equiv 19.$$

Výpočet zbytků

Problém je, jak efektivně vypočítat např. zbytek čísla 24^{53} po dělení číslem 77.

Platí (všechny výpočty provádíme „modulo 77“)

$$24^2 = 576 \equiv 37 \implies 24^4 \equiv 37^2 = 1369 \equiv 60 \implies 24^8 \equiv 60^2 = 3600 \equiv 58$$

$$\implies 24^{16} \equiv 58^2 = 3364 \equiv 53 \implies 24^{32} \equiv 53^2 = 2809 \equiv 37.$$

Odtud snadno spočítáme, že

$$24^{53} = 24^{32} \cdot 24^{16} \cdot 24^4 \cdot 24^1 \equiv 37 \cdot 53 \cdot 60 \cdot 24 = 2823840 \equiv 19.$$

Tímto postupem se vyhneme práci s příliš velkými čísly.

Úkol.

Předpokládejme, že dvojice $(457, 667)$ *je veřejný klíč osoby* X*. Tento klíč je samozřejmě všem dostupný. Podaří se nám odchytit zašifrovaný mail (určený osobě* X*), ve kterém nalezneme (zašifrovanou) zprávu* $s = 109$*.*

Naším úkolem je prolomit klíč, tzn. najít příslušný tajný klíč a na základě tohoto klíče rozšifrovat zprávu.

Úkol.

Předpokládejme, že dvojice $(457, 667)$ *je veřejný klíč osoby* X*. Tento klíč je samozřejmě všem dostupný. Podaří se nám odchytit zašifrovaný mail (určený osobě* X*), ve kterém nalezneme (zašifrovanou) zprávu* $s = 109$*.*

Naším úkolem je prolomit klíč, tzn. najít příslušný tajný klíč a na základě tohoto klíče rozšifrovat zprávu.

Úkol.

Dokažte, že pro každé přirozené číslo n *je výraz* $n^5 - n$ *dělitelný číslem 30.*

Úkol.

Předpokládejme, že dvojice $(457, 667)$ *je veřejný klíč osoby* X*. Tento klíč je samozřejmě všem dostupný. Podaří se nám odchytit zašifrovaný mail (určený osobě* X*), ve kterém nalezneme (zašifrovanou) zprávu* $s = 109$*.*

Naším úkolem je prolomit klíč, tzn. najít příslušný tajný klíč a na základě tohoto klíče rozšifrovat zprávu.

Úkol.

Dokažte, že pro každé přirozené číslo n *je výraz* $n^5 - n$ *dělitelný číslem 30.*

Úkol.

Najděte **všechna** *přirozená čísla* n*, pro která platí*

$$\varphi(n) = \frac{n}{3}.$$

Odkazy

O asymetrickém šifrování na Wikipedii:
https://cs.wikipedia.org/wiki/Asymetrická_kryptografie

Další čtení o asymetrickém šifrování:
https://is.mendelu.cz/eknihovna/opory/zobraz_cast.pl?cast=7027

Odkaz na stažení softwaru:
https://www.gpg4usb.org

Děkuji za pozornost.